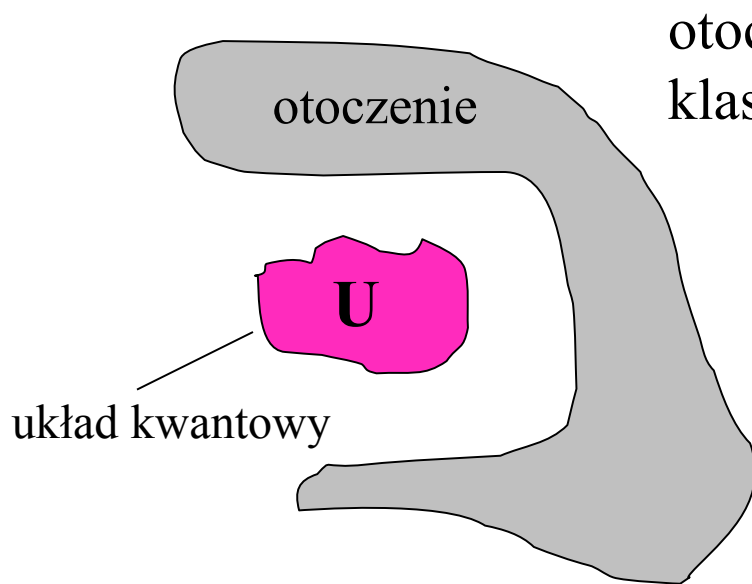


**Faza geometryczna w fizyce
klasycznej i kwantowej**

kilka prostych przykładów

Ewolucja adiabatyczna układu kwantowego



otoczenie opisane
klasycznymi parametrami

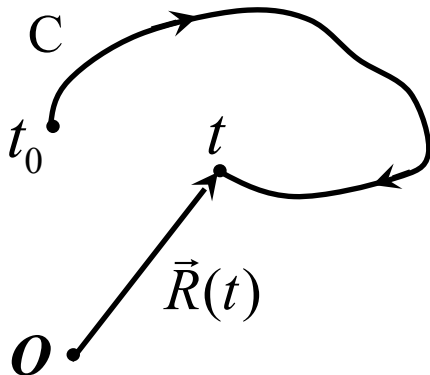
przestrzeń
parametrów

$$\vec{R} = (X, Y, Z, \dots) \in P$$

Równanie Schrödingera dla **układu**

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(\vec{R})\rangle = \hat{H}(\vec{R}) |\psi(\vec{R})\rangle$$

Niech $\vec{R} = \vec{R}(t)$ - zatacza krzywą w przestrzeni parametrów



Podstawowe założenie MK:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{R}(t)) = \hat{H}(\vec{R}(t)) \psi(\vec{R}(t))$$

(dokładnie opisuje ewolucję układu kwantowego)

Niech $|n, \vec{R}(t)\rangle$ - stan własny hamiltonianu: $\hat{H}(\vec{R}(t))|n, \vec{R}(t)\rangle = E_n(t)|n, \vec{R}(t)\rangle$

Rozwiązanie r. Schrödingera **dla układu:**

$$|\psi(t)\rangle = \sum_m c_m(t) e^{-i \overbrace{\int_0^t E_m(t') dt'}^{\text{faza dynamiczna}} / \hbar} |m, \vec{R}(t)\rangle \quad \text{r. Schröd.} \Rightarrow$$

$$\dot{c}_m(t) = -c_m(t) \langle m, \vec{R}(t) | \frac{d}{dt} |m, \vec{R}(t)\rangle - \sum_{k \neq m} c_k(t) \langle m, \vec{R}(t) | \frac{d}{dt} |k, \vec{R}(t)\rangle e^{-i\omega_{km}(t)}$$

$$\omega_{km}(t) = \frac{1}{\hbar} \int_0^t [E_k(t') - E_m(t')] dt'$$

Twierdzenie adiabatyczne:

Jeżeli $d\hat{H}/dt \approx 0$ i $|\psi(t=0)\rangle = |n, \vec{R}(0)\rangle$ - stan własny, to po czasie t układ znajduje się w tym samym stanie własnym $|n, \vec{R}(t)\rangle$

czyli $\langle m, \vec{R}(t) | \frac{d}{dt} |k, \vec{R}(t)\rangle = 0$ $\rightarrow \dot{c}_n(t) \approx -c_n(t) \langle n, \vec{R}(t) | \frac{d}{dt} |n, \vec{R}(t)\rangle$

slajd_16 oraz $|\psi(t)\rangle = c_n(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt'} |n, \vec{R}(t)\rangle$

Z tw. adiabaticznego: $\dot{c}_n(t) \approx -c_n(t) \langle n, \vec{R}(t) | \frac{d}{dt} | n, \vec{R}(t) \rangle$

$$1 = \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle \Rightarrow c_n(t) = e^{-i\gamma_n(t)}$$

stąd

$$i\dot{\gamma}_n(t) = - \langle n, \vec{R}(t) | \frac{d}{dt} | n, \vec{R}(t) \rangle$$

$$\gamma_n(t) = i \int_0^t \langle n, \vec{R}(t') | \frac{d}{dt} | n, \vec{R}(t') \rangle dt' = i \int_0^t \langle n, \vec{R}(t') | \nabla | n, \vec{R}(t') \rangle \cdot \vec{R}(t') dt'$$

$$= \int_C \underbrace{i \langle n, \vec{R}(t') | \nabla | n, \vec{R}(t') \rangle \cdot d\vec{R}}_{\vec{A}_n(\vec{R}) - \text{„potencjał Berry’ego”}} = \int_C \vec{A}_n(\vec{R}) \cdot d\vec{R}$$

ostatecznie

$$\gamma_n(t) = \int_C \vec{A}_n(\vec{R}) \cdot d\vec{R}$$

Transformacja cechowania

$$|n', \vec{R}(t)\rangle = e^{i\lambda_n(t)} |n, \vec{R}(t)\rangle$$

Transformacja cechowania dla $\vec{A}_n(\vec{R})$:

$$\vec{A}'_n(\vec{R}) = \int_{\Gamma} i \langle n', \vec{R}(t') | \nabla | n', \vec{R}(t') \rangle \cdot d\vec{R} = \vec{A}_n(\vec{R}) - \nabla \lambda_n(\vec{R})$$

czyli

$$\vec{A}'_n(\vec{R}) = \vec{A}_n(\vec{R}) - \nabla \lambda_n(\vec{R})$$

- tak jak dla pola el-m

Transformacja cechowania dla $\gamma_n(t)$:

$$\begin{aligned} \gamma'_n(t) &= \int_C \vec{A}'(\vec{R}) \cdot d\vec{R} = \int_C [\vec{A}(\vec{R}) - \nabla \lambda_n(\vec{R})] \cdot d\vec{R} = \\ &= \gamma_n(t) - \int_C d\lambda_n = \gamma_n(t) - [\lambda_n(t) - \lambda_n(0)] \end{aligned}$$

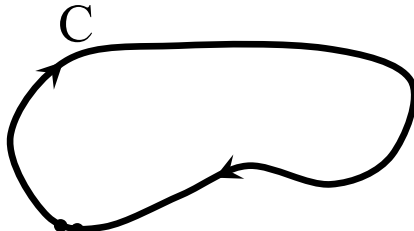
ostatecznie

$$\gamma'_n(t) = \gamma_n(t) + \lambda_n(0) - \lambda_n(t)$$

$$\gamma'_n(t) = \gamma_n(t) + \lambda_n(0) - \lambda_n(t)$$

- zawsze można tak dobrać $\lambda_n(t)$ żeby faza $\gamma'_n(t) = 0$

! o ile krzywa **C** w przestrzeni parametrów **!**
NIE jest zamknięta

Gdy C jest zamknięta  wtedy $\lambda_n(T) = \lambda_n(0)$
 $\vec{R}(0) = \vec{R}(T)$ $\gamma'_n(T) = \gamma_n(T)$

Faza wektora stanu wzrasta o $\gamma_n(T)$ przy cyklicznej i adiabatycznej zmianie parametrów otoczenia.

$$\gamma_n(C) \equiv \gamma_n(T) = \int_C \vec{A}_n(\vec{R}) \cdot d\vec{R} \quad \text{-zależy tylko od krzywej (geometryczna faza Berry'ego)}$$

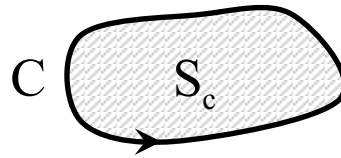
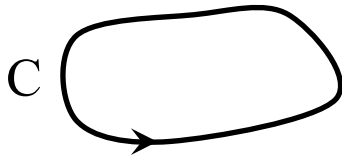
Stan kwantowy po pełnym cyklu:

$$|\psi(T)\rangle = e^{-i \frac{1}{\hbar} \int_0^T E_n(t) dt} e^{i\gamma_n(C)} |n, \vec{R}(0)\rangle$$

faza dynamiczna
faza Berry'ego

$\vec{F}_n(\vec{R})$ - nie zależy od transformacji cechowania

$$\gamma_n(C) = \int_C \vec{A}_n(\vec{R}) \cdot d\vec{R} \stackrel{\text{tw. Stokes'a}}{=} \int_{S_C} [\nabla \times \vec{A}_n(\vec{R})] \cdot d\vec{s} = \int_{S_C} \vec{F}_n(\vec{R}) \cdot d\vec{s}$$

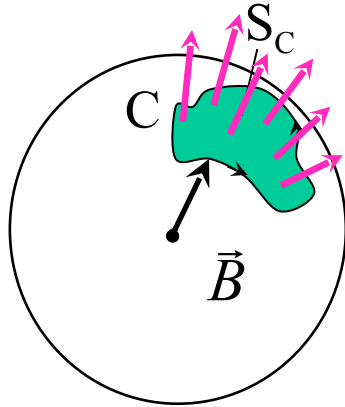


można łatwo pokazać, że:

$$\vec{F}(\vec{R}) = i \sum_{m \neq n} \frac{\langle n, \vec{R} | \nabla \hat{H} | m, \vec{R} \rangle \times \langle m, \vec{R} | \nabla \hat{H} | n, \vec{R} \rangle}{(E_m - E_n)^2}$$

Przykład 1. Spinor (1/2) w wolnozmiennym polu magnetycznym \vec{B}

$$|\vec{B}| = B = \text{const.}$$



- przestrzeń parametrów $P = S^2$

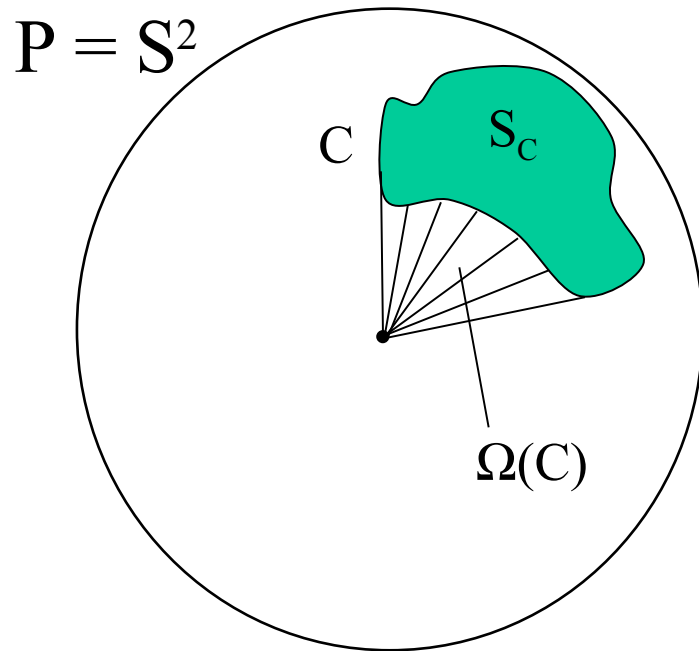
$$\text{Hamiltonian spinora } \hat{H}(\vec{B}) = g \hat{S} \cdot \vec{B}$$

$$\text{r. Schrödingera: } \hat{H}(\vec{B})|\pm, \vec{B}\rangle = E_{\pm}(\vec{B})|\pm, \vec{B}\rangle, \quad E_{\pm}(\vec{B}) = \pm \frac{\hbar}{2} gB$$

wtedy dla $|+, \vec{B}\rangle$:

$$\vec{F}_+(\vec{B}) = i \frac{\langle +, \vec{B} | \nabla \hat{H} | -, \vec{B} \rangle \times \langle -, \vec{B} | \nabla \hat{H} | +, \vec{B} \rangle}{(E_+ - E_-)^2} = - \frac{\vec{B}}{2B^3}$$

$$\gamma_n(C) = \int_{S_C} \vec{F}(\vec{R}) \cdot d\vec{S} = - \frac{1}{2} \int_{S_C} \frac{B ds}{B^3} = - \frac{1}{2} \frac{S_C}{B^2} = - \frac{1}{2} \Omega(C)$$



$$\gamma_n(C) = -\frac{1}{2}\Omega(C)$$

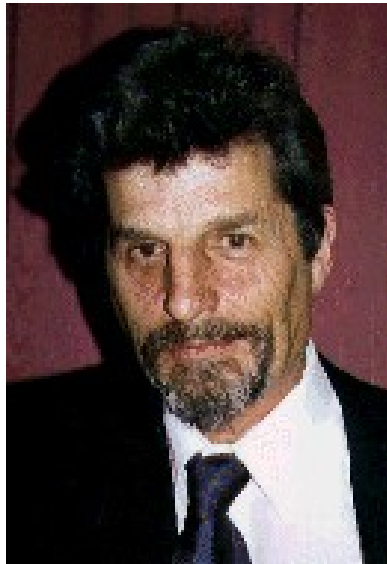
Ω - kąt bryłowy, pod którym widać powierzchnię S_c ze środka sfery

Ogólnie: $\gamma_n(C) = -s\Omega(C)$

dowolny spin

Przykład 2. Zjawisko Aharonova-Bohma

(Y.Aharonov and D.Bohm, Phys. Rev. 115 (1959) 485)

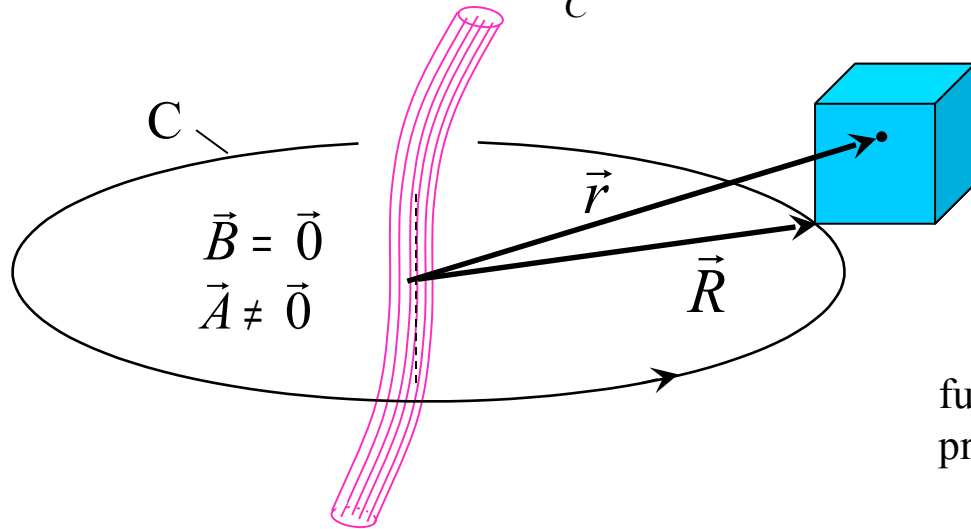


**Yakir Aharonov (ur. 1932)
Tel Aviv University**



**David Bohm (1917–1992)
University of London
(Manhattan Project)**

$$\Phi = \oint_C \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad \text{- strumień magnetyczny}$$



elektron zamknięty w pudełku

$$\langle \vec{r} | n, \vec{R} \rangle = e^{i \frac{q}{\hbar} \int_{\vec{R}}^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} \psi_n(\vec{r} - \vec{R})$$

funkcja własna
przy $\Phi \neq 0$

funkcja własna
przy $\Phi = 0$

Po pełnym obiegu stan zyskuje czynnik fazowy $e^{i\gamma_n(C)}$

Liczmy potencjał Berry'ego: $\vec{A}_n(\vec{R}) = i \langle n, \vec{R} | \nabla | n, \vec{R} \rangle = \dots = \frac{q}{\hbar} \vec{A}(\vec{R})$

↑
potencjał wektorowy
pola \vec{B}

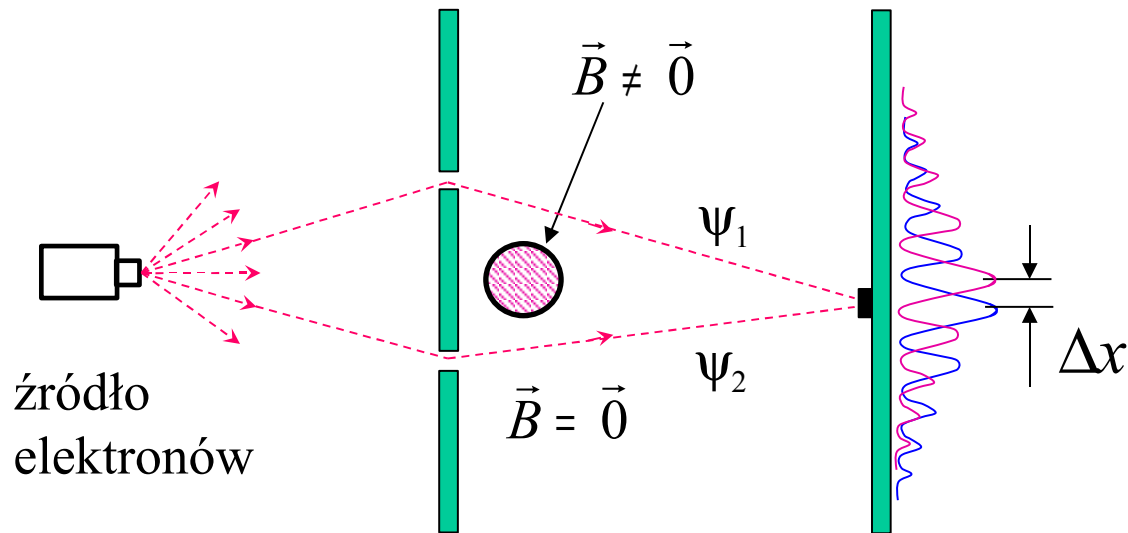
$$\gamma_n(C) = \int_C \vec{A}_n(\vec{R}) \cdot d\vec{R} = \frac{q}{\hbar} \int_C \vec{A}(\vec{R}) \cdot d\vec{R} = \frac{q}{\hbar} \Phi$$

NIE ZALEŻY ani od krzywej **C** ani od stanu układu (faza topologiczna)

Potwierdzenie doświadczalne zjawiska A-B

Mollenstedt and W. Bayh, Physikalische Blätter 18 (1962) 299

Schemat doświadczenia



Δx - przesunięcie wynika z różnicy faz

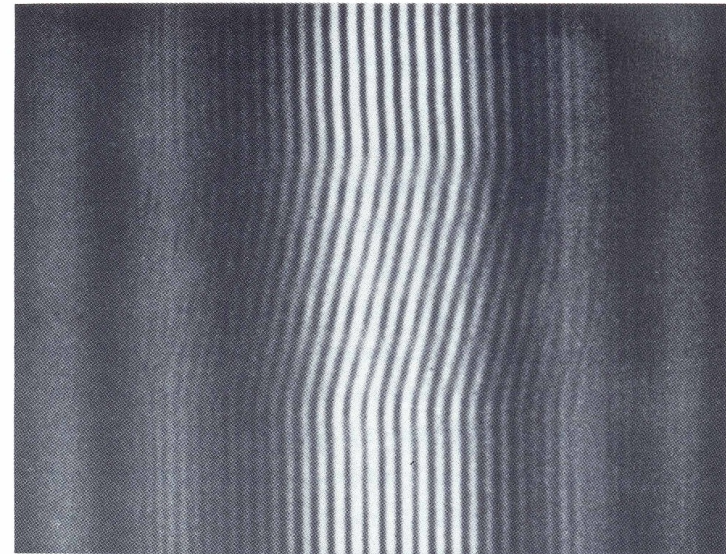
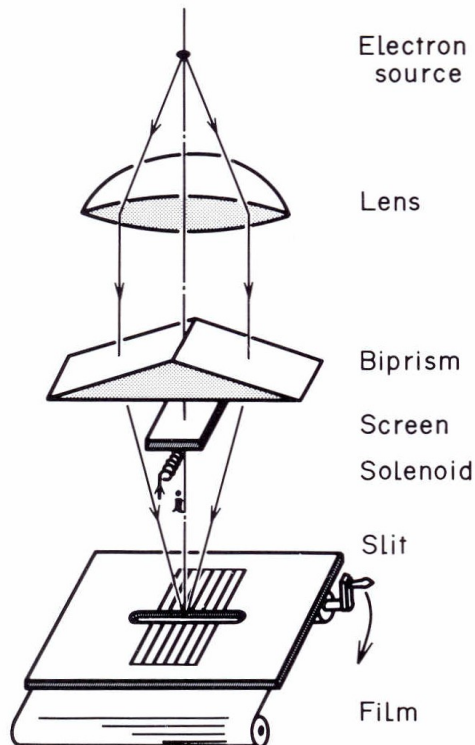
$$\psi_1'(\vec{r}) + \psi_2'(\vec{r}) \propto \psi_1(\vec{r}) + e^{i\frac{q}{\hbar}\Phi} \psi_2(\vec{r})$$

↑
odpowiada za przesunięcie obrazu
interferencyjnego

$$|\psi_1'(\vec{r}) + \psi_2'(\vec{r})|^2 =$$

$$= |\psi_1(\vec{r})|^2 + |\psi_2(\vec{r})|^2 + 2|\psi_1(\vec{r})\psi_2(\vec{r})|\cos(\varphi_{12} + q\Phi/\hbar)$$

położenie prążka najjaśniejszego dla $\varphi_{12} = -q\Phi/\hbar$

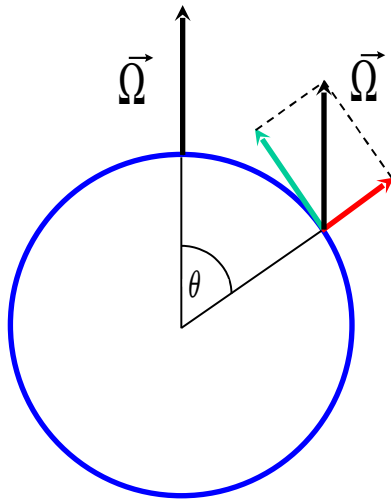


Analogia elektrostat. - Aharonov-Casher effect,
Phys. Rev.Lett. **53** (1984) 319

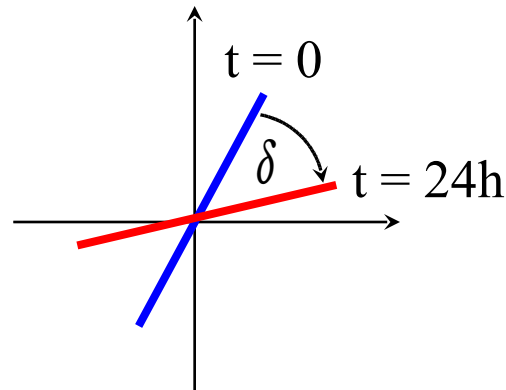
Przykład 3. Wahadło Foucaulta – rozważania geometryczne

Opis w układzie związanym z Ziemią - Wahadło I

II. Zada dynamiki – główny wkład: **siła ciężkości + siła Coriolisa**



w ciągu doby płaszczyzna drgań
wykonuje obrót o kąt $\delta = -2\pi \cos(\theta)$

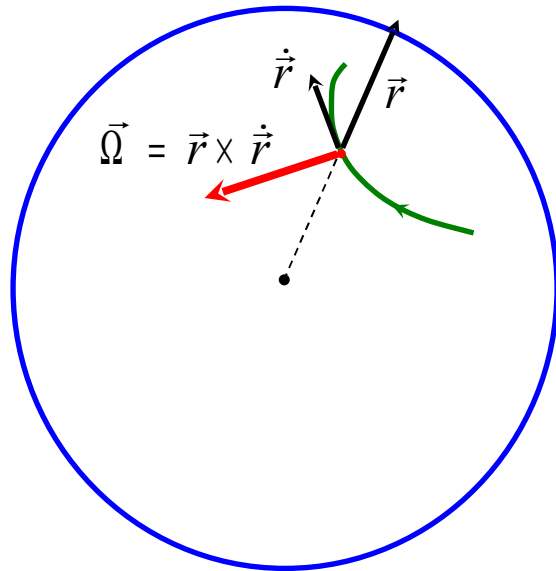


Opis w układzie inercyjnym (wahadło2) - - wymaga geometrii różniczkowej

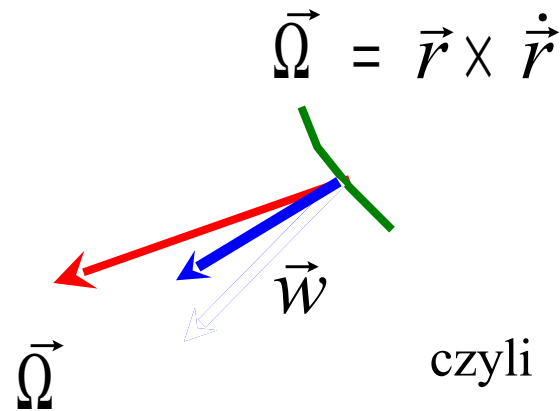
Kierunek drgań wahadła Foucaulta jest przenoszony równoległe wzdłuż równoleżnika

Przeniesienie równoległe w przestrzeni zakrzywionej - komentarz

Przeniesienie równoległe na sferze



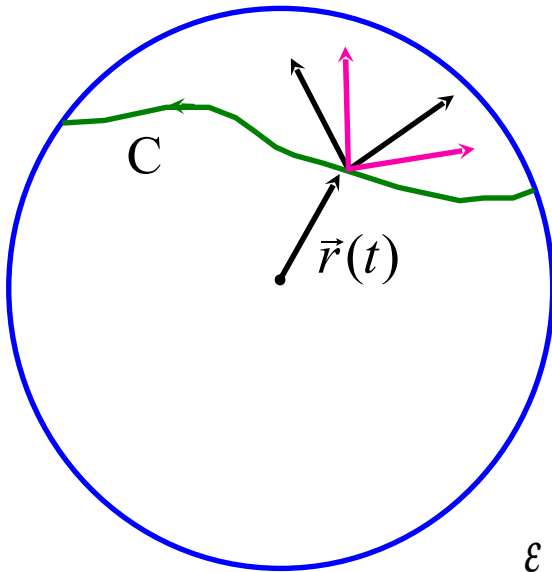
Wektor \vec{W} przenoszony równoległe ulega lokalnemu obrotowi z prędkością kątową



czyli

$$\dot{\vec{W}} = \vec{\Omega} \times \vec{W}$$

Obliczenie kąta precesji



(\hat{e}_1, \hat{e}_2) - baza związana z liniami współrzędnych

(\hat{a}_1, \hat{a}_2) - baza przenoszona równoległe
wzdłuż krzywej C

$$\hat{a}_1 = \hat{e}_1 \cos \delta - \hat{e}_2 \sin \delta$$

$$\hat{a}_2 = \hat{e}_1 \sin \delta + \hat{e}_2 \cos \delta$$

$$\varepsilon = \frac{\hat{e}_1 + i\hat{e}_2}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha = \frac{\hat{a}_1 + i\hat{a}_2}{\sqrt{2}}$$

$$\longrightarrow \alpha(t) = e^{-i\delta(t)} \varepsilon(t)$$

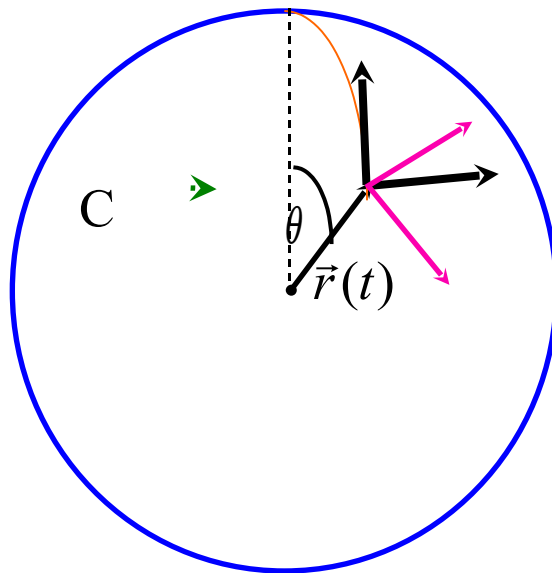
Wtedy warunek przenoszenia równoległego $\dot{\hat{a}}_i = \vec{\Omega} \times \hat{a}_i$ jest równoważny warunkowi

$$\boxed{\alpha^* \cdot \dot{\alpha} = 0} \longrightarrow \dot{\delta} = \text{Im}(\bar{\varepsilon} \cdot \dot{\varepsilon})$$

(analog-s_16)

$$\dot{\delta} = \text{Im}(\bar{\varepsilon} \cdot \dot{\varepsilon}) \longrightarrow \delta(C) \equiv \delta(T) = \text{Im} \int_0^T (\bar{\varepsilon} \cdot \dot{\varepsilon}) dt = \oint_C \bar{\varepsilon} \cdot d\varepsilon$$

Dla sfery



$$\delta(C) = -2\pi \cos\theta$$

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ

Niech $|n, \vec{R}(t)\rangle$ - stan własny hamiltonianu: $\hat{H}(\vec{R}(t))|n, \vec{R}(t)\rangle = E_n(t)|n, \vec{R}(t)\rangle$

Rozwiązanie r. Schrödingera **dla układu:**

$$|\psi(t)\rangle = \sum_m c_m(t) e^{-i \overbrace{\int_0^t E_m(t') dt'}^{\text{faza dynamiczna}} / \hbar} |m, \vec{R}(t)\rangle \quad \text{r. Schröd.} \Rightarrow$$

$$\dot{c}_m(t) = -c_m(t) \langle m, \vec{R}(t) | \frac{d}{dt} |m, \vec{R}(t)\rangle - \sum_{k \neq m} c_k(t) \langle m, \vec{R}(t) | \frac{d}{dt} |k, \vec{R}(t)\rangle e^{-i\omega_{km}(t)}$$

$$\omega_{km}(t) = \frac{1}{\hbar} \int_0^t [E_k(t') - E_m(t')] dt'$$

Twierdzenie adiabatyczne:

Jeżeli $d\hat{H}/dt \approx 0$ i $|\psi(t=0)\rangle = |n, \vec{R}(0)\rangle$ - stan własny, to po czasie t układ znajduje się w tym samym stanie własnym $|n, \vec{R}(t)\rangle$

czyli $\langle m, \vec{R}(t) | \frac{d}{dt} |k, \vec{R}(t)\rangle = 0$ $\rightarrow \dot{c}_n(t) \approx -c_n(t) \langle n, \vec{R}(t) | \frac{d}{dt} |n, \vec{R}(t)\rangle$

powrót oraz $|\psi(t)\rangle = c_n(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt'} |n, \vec{R}(t)\rangle$